練習問題 2-A

1. （1）　$x^2+4x+y^2-6y+5=0$

$(x+2)^2-4+(y-3)^2-9+5=0$

$(x+2)^2+(y-3)^2=8$

$(x+2)^2+(y-3)^2=(2\sqrt{2})^2$

よって，中心　$\boldsymbol{(-2,\ 3)}$，　半径　$\boldsymbol{2\sqrt{2}}$

（2）　$x^2+y^2-2y-4=0$

$x^2+(y-1)^2-1-4=0$

$x^2+(y-1)^2=5$

$x^2+(y-1)^2=(\sqrt{5})^2$

よって，中心　$\boldsymbol{(0,\ 1)}$，　半径　$\boldsymbol{\sqrt{5}}$

2. （1）　求める円の方程式を

$(x+1)^2+(y-2)^2=r^2$

とおくと，この円が点 $(3,\ 5)$ を通るので

$(3+1)^2+(5-2)^2=r^2$

よって，$r^2=25$

したがって

$\boldsymbol{(x+1)^2+(y-2)^2=25}$

（2）　中心の座標は，$(t,\ t)$ と表せるので，求める円の方程式を

$(x-t)^2+(y-t)^2=r^2$

とおく．この円が与えられた2点を通ることから

$$\begin{cases} t^2+t^2=r^2 \\ (1-t)^2+(2-t)^2=r^2 \end{cases}$$

r^2 を消去すると

$2t^2=(1-t)^2+(2-t)^2$

$2t^2=t^2-2t+1+t^2-4t+4$

$6t=5$

$t=\dfrac{5}{6}$

よって，$r^2=2t^2=2\cdot\dfrac{25}{36}=\dfrac{25}{18}$

したがって

$$\boldsymbol{\left(x-\frac{5}{6}\right)^2+\left(y-\frac{5}{6}\right)^2=\frac{25}{18}}$$

3.　点Pの座標を $(x,\ y)$ とすると

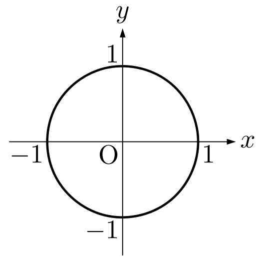
$$\left.\begin{aligned} \mathrm{AP}^2&=(x+2)^2+y^2 \\ \mathrm{BP}^2&=(x-2)^2+y^2 \end{aligned}\right\}\cdots①$$

（1）　$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2=10$ に①を代入すると

$(x+2)^2+y^2+(x-2)^2+y^2=10$

$2x^2+2y^2+8=10$

$\boldsymbol{x^2+y^2=1}$

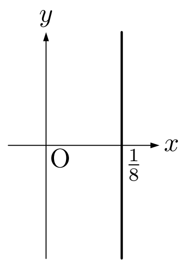


（2）　$\mathrm{AP}^2-\mathrm{BP}^2=10$ に①を代入すると

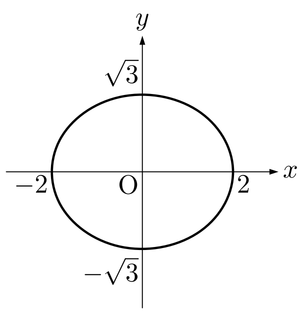
$(x+2)^2+y^2-\{(x-2)^2+y^2\}=1$

$8x=1$

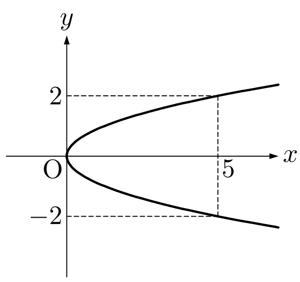
$\boldsymbol{x=\dfrac{1}{8}}$



4. （1）　$\dfrac{x^2}{2^2}+\dfrac{y^2}{(\sqrt{3})^2}=1$

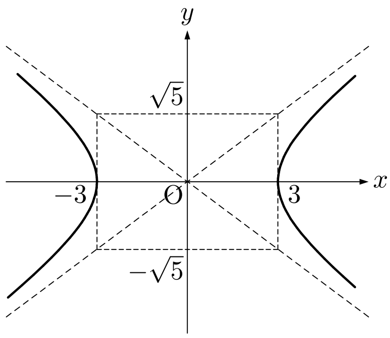


（2）　$y^2=4\cdot\dfrac{1}{5}x$



（3）　$\dfrac{x^2}{3^2}-\dfrac{y^2}{(\sqrt{5})^2}=1$

漸近線の方程式は，$y=\pm\dfrac{\sqrt{5}}{3}x$



5. （1） 焦点が $(0,\ \pm\sqrt{5})$ であるから，求める楕円の方程式は

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (b>a>0)$$

とおくことができる．長軸の長さが 8 であるから

$$2b=8$$

よって，$b=4$

$$\sqrt{b^2-a^2}=\sqrt{5}$$

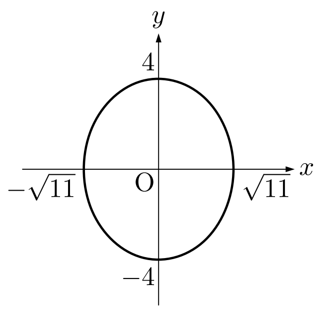
であるから，これに $b=4$ を代入して

$$16-a^2=5$$

よって，$a^2=11$

したがって，楕円の方程式は

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{11}+\frac{y^2}{16}=1}$$



（2） 焦点は x 軸上にあるので，求める双曲線の方程式は

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>0,\ b>0)$$

とおくことができる．

点 $(2,\ 0)$ を通るから

$$\frac{4}{a^2}=1$$

よって，$a^2=4\cdots$①

漸近線の傾きが $\pm\dfrac{3}{2}$ であるから

$$\frac{b}{a}=\frac{3}{2}$$

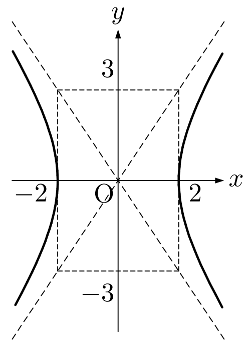
よって，$b=\dfrac{3}{2}a$ となるので

$$b^2=\frac{9}{4}a^2$$

①を代入して，$b^2=\dfrac{9}{4}\cdot 4=9$

したがって，双曲線の方程式は

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1}$$



6. $y=x+k$ を，$4x^2-y^2=-4$ に代入して整理すると

$$4x^2-(x+k)^2=-4$$
$$4x^2-(x^2+2kx+k^2)=-4$$
$$3x^2-2kx-k^2+4=0\cdots ①$$

この 2 次方程式の判別式を D とすると

$$\begin{aligned}\frac{D}{4}&=(-k)^2-3(-k^2+4)\\&=k^2+3k^2-12\\&=4k^2-12\end{aligned}$$

双曲線と直線が接するための条件は，$D=0$ であるから

$$4k^2-12=0$$
$$k^2=3$$
$$k=\pm\sqrt{3}$$

このとき，①は

$$3x^2\pm 2\sqrt{3}x+1=0$$

となるから，これを解いて

$$(\sqrt{3}x\pm 1)^2=0$$
$$x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$
$$\begin{aligned}y&=x+k\\&=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}\pm\sqrt{3} \quad \text{（複号同順）}\\&=\frac{\pm\sqrt{3}\pm 3\sqrt{3}}{3}\\&=\pm\frac{4\sqrt{3}}{3}\end{aligned}$$

よって，$\boldsymbol{k=\pm\sqrt{3}}$

接点の座標は

$$\boldsymbol{\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{3},\ \pm\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)} \quad \textbf{（複号同順）}$$

7. （1） $x^2+y^2<4$ の表す領域は，円 $x^2+y^2=4$ の内部である．

$2x+y+2>0$ より，$y>-2x-2$

この不等式の表す領域は，直線 $y=-2x-2$ の

上側である．

円と直線の交点の座標を求めると

$x^2+(-2x-2)^2=4$

$x^2+(4x^2+8x+4)=4$

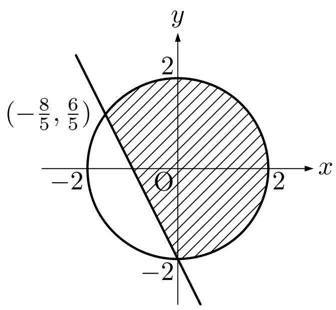
$5x^2+8x=0$

$x(5x+8)=0$

$x=0,\ -\dfrac{8}{5}$

よって，$(0,\ -2)$, $\left(-\dfrac{8}{5},\ \dfrac{6}{5}\right)$

したがって，求める領域は，2 つの領域の共通部分であるから，図の斜線部分である．



ただし，境界線は含まない．

（2） $x^2+y \leqq 0$ より，$y \leqq -x^2$

この不等式の表す領域は，放物線 $y=-x^2$ の下側である．

$x-y-2 \leqq 0$ より，$y \geqq x-2$

この不等式の表す領域は，直線 $y=x-2$ の上側である．

放物線と直線の交点の座標を求めると

$-x^2=x-2$

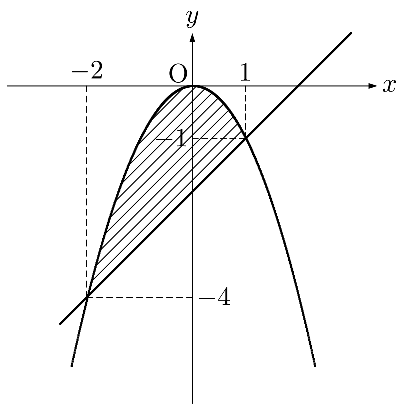
$x^2+x-2=0$

$(x+2)(x-1)=0$

$x=-2,\ 1$

よって，$(-2,\ -4)$, $(1,\ -1)$

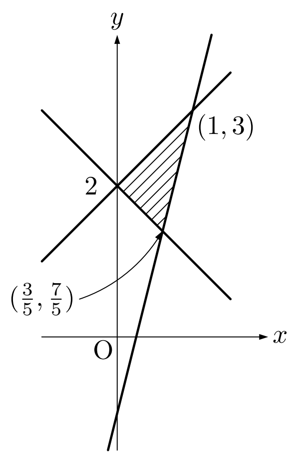
したがって，求める領域は，2 つの領域の共通部分であるから，図の斜線部分である．



ただし，境界線を含む．

8. 2 直線 $y=x+2$, $y=4x-1$ の交点の座標は，$(1,\ 3)$．また，2 直線 $y=-x+2$, $y=4x-1$ の交点の座標は，$\left(\dfrac{3}{5},\ \dfrac{7}{5}\right)$ である．

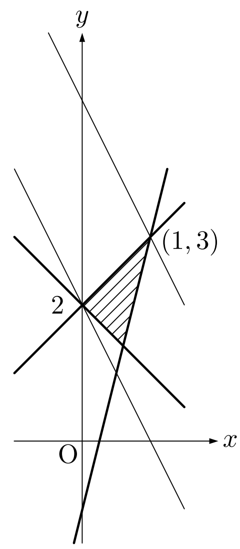
よって，与えられた連立不等式の表す領域は図の斜線部分である．ただし，境界線を含む．



$2x+y=k$ とおくと

$y=-2x+k \cdots ①$

①は，傾きが -2，切片が k の直線を表す．



図より，直線①が点 $(1,\ 3)$ を通るとき，k の値は最大となる．

このとき，$k=2x+y=2\cdot 1+3=5$

また，直線①が点 $(0,\ 2)$ を通るとき，k の値は最小となる．

このとき，$k=2x+y=2\cdot 0+2=2$

よって

最大値　**5 ($x=1$, $y=3$ のとき)**

最小値　**2 ($x=0$, $y=2$ のとき)**

練習問題 2-B

1.　$y = mx$ を $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 12 = 0$ に代入して整理すると

$$x^2 + (mx)^2 - 4x - 6(mx) + 12 = 0$$
$$(m^2 + 1)x^2 - 2(3m + 2)x + 12 = 0$$

この 2 次方程式の判別式を D とすると

$$\begin{aligned}\frac{D}{4} &= \{-(3m+2)\}^2 - (m^2+1)\cdot 12\\ &= 9m^2 + 12m + 4 - 12m^2 - 12\\ &= -3m^2 + 12m - 8\end{aligned}$$

直線と円が接するのは，$D = 0$ のときであるから

$$3m^2 - 12m + 8 = 0$$
$$\begin{aligned}m &= \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 3\cdot 8}}{3}\\ &= \frac{6 \pm \sqrt{12}}{3}\\ &= \boldsymbol{\frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{3}}\end{aligned}$$

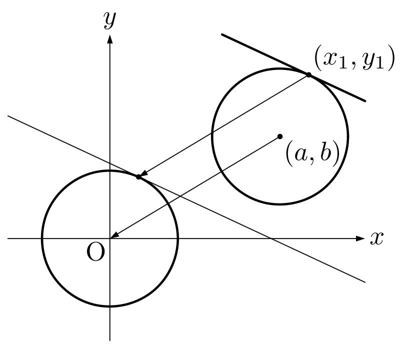
また，直線と円が共有点をもたないのは，$D < 0$ のときであるから

$$-3m^2 + 12m - 8 < 0$$
$$3m^2 - 12m + 8 > 0$$
$$3\left(m - \frac{6-2\sqrt{3}}{3}\right)\left(m - \frac{6+2\sqrt{3}}{3}\right) > 0$$

よって

$$\boldsymbol{m < \frac{6-2\sqrt{3}}{3},\ \frac{6+2\sqrt{3}}{3} < m}$$

2.　円 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ と円周上の点 $(x_1,\ y_1)$ を，x 軸方向に $-a$，y 軸方向に $-b$ だけ平行移動させると，円は $x^2 + y^2 = r^2$ に，円周上の点は $(x_1 - a,\ y_1 - b)$ に移る．



円 $x^2 + y^2 = r^2$ の，点 $(x_1 - a,\ y_1 - b)$ における接線の方程式は

$$(x_1 - a)x + (y_1 - b)y = r^2$$

である．

求める接線の方程式は，この直線を，x 軸方向に a，y 軸方向に b だけ平行移動させればよいから

$$\boldsymbol{(x_1 - a)(x - a) + (y_1 - b)(y - b) = r^2}$$

$(x_1,\ y_1) = (3,\ 6)$，$a = -2$，$b = 3$，$r^2 = 34$ であるから，求める接線の方程式は

$$(3+2)(x+2) + (6-3)(y-3) = 34$$
$$5(x+2) + 3(y-3) = 34$$
$$5x + 10 + 3y - 9 = 34$$
$$\boldsymbol{5x + 3y = 33}$$

3.　$y = mx + 2$ を $3x^2 + 4y^2 = 12$ に代入して整理すると

$$3x^2 + 4(mx+2)^2 = 12$$
$$3x^2 + 4(m^2x^2 + 4mx + 4) = 12$$
$$(4m^2 + 3)x^2 + 16mx + 4 = 0$$

この 2 次方程式の判別式を D とすると

$$\begin{aligned}\frac{D}{4} &= (8m)^2 - (4m^2+3)\cdot 4\\ &= 64m^2 - 16m^2 - 12\\ &= 48m^2 - 12\end{aligned}$$

i）$D > 0$ のとき，すなわち

$$48m^2 - 12 > 0$$
$$4m^2 - 1 > 0$$
$$(2m+1)(2m-1) > 0$$
$$m < -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2} < m \text{ のとき}$$

共有点の個数は 2 個

ii）$D = 0$ のとき，すなわち

$$m = \pm\frac{1}{2} \text{ のとき}$$

共有点の個数は 1 個

iii）$D < 0$ のとき，すなわち

$$-\frac{1}{2} < m < \frac{1}{2} \text{ のとき}$$

共有点の個数は 0 個

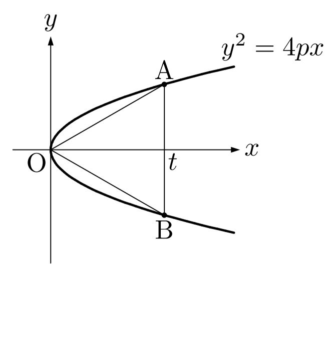
よって

$\boldsymbol{m < -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2} < m}$ **のとき　2 個**

$\boldsymbol{m = \pm\frac{1}{2}}$ **のとき　1 個**

$\boldsymbol{-\frac{1}{2} < m < \frac{1}{2}}$ **のとき　0 個**

4.



点A，Bの x 座標を t とすると

$y^2=4pt$ より，$y=\pm 2\sqrt{pt}$

ここで，A$(t,\ 2\sqrt{pt})$，B$(t,\ -2\sqrt{pt})$ とする．

$$\mathrm{OA}=\sqrt{t^2+(2\sqrt{pt})^2}=\sqrt{t^2+4pt}$$

$$\mathrm{AB}=2\sqrt{pt}-(-2\sqrt{pt})=4\sqrt{pt}$$

OA = AB より，$\mathrm{OA}^2=\mathrm{AB}^2$ であるから

$t^2+4pt=16pt$

$t^2-12pt=0$

$t(t-12p)=0$

$t \fallingdotseq 0$ であるから，$t=12p$

よって

$\mathrm{AB}=4\sqrt{p\cdot 12p}=8\sqrt{3}p$

したがって

$$\triangle\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot t=\frac{1}{2}\cdot 8\sqrt{3}p\cdot 12p=\boldsymbol{48\sqrt{3}p^2}$$

5. （1） $\triangle$OAB で，$\mathrm{OA}^2+\mathrm{OB}^2=\mathrm{AB}^2$ であるから

$a^2+b^2=3^2$

すなわち，$\boldsymbol{a^2+b^2=9}$

（2）$x=\dfrac{2\cdot a+1\cdot 0}{1+2}=\boldsymbol{\dfrac{2}{3}a}$

$y=\dfrac{2\cdot 0+1\cdot b}{1+2}=\boldsymbol{\dfrac{1}{3}b}$

（3）$x=\dfrac{2}{3}a$ より，$a=\dfrac{3}{2}x$

$y=\dfrac{1}{3}b$ より，$b=3y$

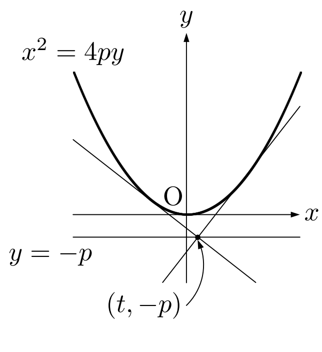
これらを，$a^2+b^2=9$ に代入すると

$\left(\dfrac{3}{2}x\right)^2+(3y)^2=9$

$\dfrac{9}{4}x^2+9y^2=9$

$\boldsymbol{\dfrac{x^2}{4}+y^2=1}$

6.



準線上の点を $(t,\ -p)$ とする．ただし，$p \fallingdotseq 0$ である．この点から放物線に引いた接線は y 軸に平行ではないので

$y=m(x-t)-p$

とおくことができる．これを $x^2=4py$ に代入して整理すると

$x^2=4p\{m(x-t)-p\}$

$x^2=4pmx-4pmt-4p^2$

$x^2-4pmx+(4pmt+4p^2)=0$

この2次方程式の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(-2pm)^2-1(4pmt+4p^2)=4p^2m^2-4ptm-4p^2$$

接するのは，$D=0$ のときであるから

$4p^2m^2-4ptm-4p^2=0$

この2次方程式の2つの解を m_1，m_2 とすると，m_1，m_2 が2本の接線の傾きを表す．

ここで，解と係数の関係より

$m_1m_2=\dfrac{-4p^2}{4p^2}=-1$

したがって，2本の接線はお互いに直交する．

7. $y^2 \leqq 4x$ より，$x \geqq \dfrac{1}{4}y^2$

この不等式の表す領域は，放物線 $x=\dfrac{1}{4}y^2$ の右側である．

$x+y \leqq 3$ より，$y \leqq -x+3$

この不等式の表す領域は，直線 $y=-x+3$ の下側である．

放物線と直線の交点の座標を求めると

$\dfrac{1}{4}y^2=3-y$

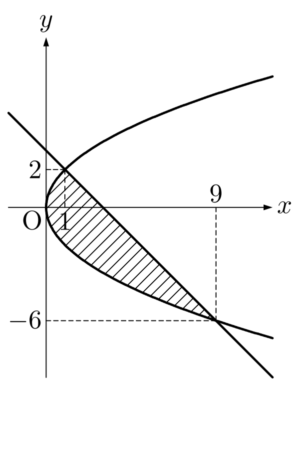
$y^2+4y-12=0$

$(y+6)(y-2)=0$

$y=-6,\ 2$

よって，$(9,\ -6)$，$(1,\ 2)$

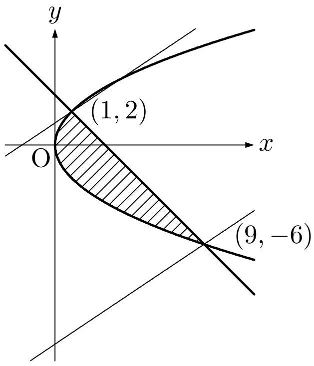
したがって，求める領域は，2つの領域の共通部分であるから，図の斜線部分である．ただし，境界線を含む．



$2x-3y=k$ とおくと

$y=\frac{2}{3}x-\frac{k}{3}\cdots①$

①は，傾きが $\frac{2}{3}$，切片が $-\frac{k}{3}$ の直線を表す．



図より，直線①が点 $(9,\ -6)$ を通るとき，$-\frac{k}{3}$ が最小になるので，k の値は最大となる．

このとき，$k=2x-3y=2\cdot 9-3\cdot(-6)=36$

また，直線①が点 $(1,\ 2)$ を通るとき，$-\frac{k}{3}$ が最大になるので，k の値は最小となる．

このとき，$k=2x-3y=2\cdot 1-3\cdot 2=-4$

よって

最大値　**36 ($x=9$，$y=-6$ のとき)**

最小値　**−4 ($x=1$，$y=2$ のとき)**

8.　点 P 座標を $(x,\ y)$ とすると

$$\mathrm{PF}=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$\mathrm{PF}'=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

$\mathrm{PF}+\mathrm{PF}'=2a$ に代入すると

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

両辺を 2 乗して整理すると

$$(x-c)^2+y^2$$
$$=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+(x+c)^2+y^2$$

$$4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}=4a^2+4cx$$

$$a\sqrt{(x+c)^2+y^2}=a^2+cx$$

両辺を 2 乗して整理すると

$$a^2\{(x+c)^2+y^2\}=a^4+2a^2cx+c^2x^2$$

$$a^2x^2+2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2=a^4+2a^2cx+c^2x^2$$

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$$

$a^2-c^2=b^2$ とおくと

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$$

両辺を a^2b^2 で割って

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$$

∎